Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za farmacijo*

Verjetnost in verjetnostne porazdelitve

Iztok Grabnar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za farmacijo

Marec, 2009

Verjetnost

"Nothing in life is certain. In everything we do, we gauge the chances of successfull outcomes, from business to medicine to the weather. But for most of human history, **probability**, the formal study of the laws of chance, was used for only one thing: **gambling**."

Teorija verjetnosti

- Obravnava situacije (poskuse) pri katerih je izid odvisen od naključja (naključni eksperiment).
- Prostor izidov je množica vseh izidov.
- Podmnožice prostora izidov so dogodki.

Met dveh igralnih kock

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Definicije

- Izid
- Dogodek
- Vsota
- Produkt
- Komplementaren dogodek
- Nemogoč dogodek
- Gotov dogodek
- Nezdružljiva dogodka
- Neodvisna dogodka

Vejetnost

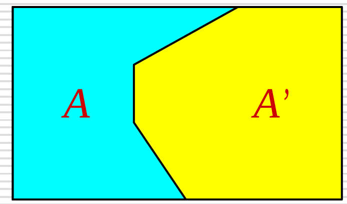
- Relativna frekvenca dogodka pri n ponovitvah

$$\frac{frekvenca(A)}{N}$$

- P(A) je limita relativne frekvence dogodka *A* pri velikem številu ponovitev poskusa.

- Na dogodkih lahko izvajamo iste operacije kot na množicah.
- Verjetnost je funcija, ki dogodku A priredi število $P(A) \in [0,1]$. Pri tem velja:
  - $P(G) = 1$
  - $AB=N \Rightarrow P(A+B)=P(A) + P(B)$

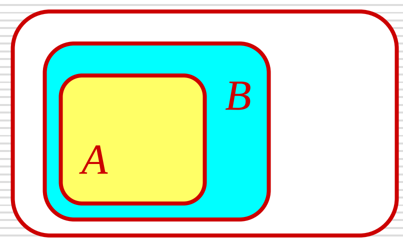
- $P(A')=1-P(A)$



$P(A)+P(A')=P(G)=1$

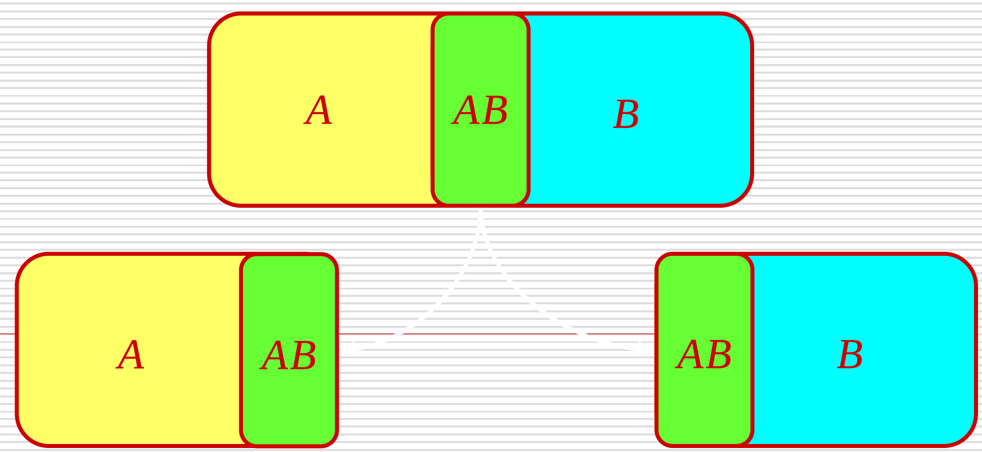
- $P(N)=0$

- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



$P(B)=P(A+(B-A))=$
$P(A)+P(B-A) \geq$
$P(A)$

- $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



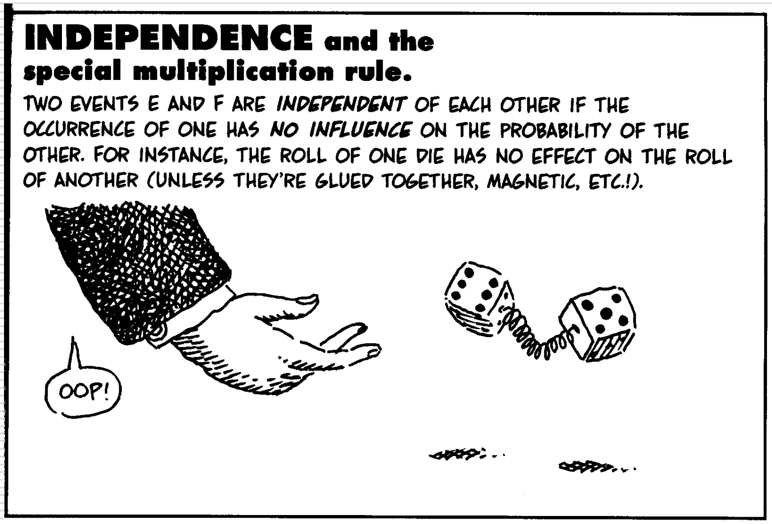
Pogojna verjetnost

- *A*,*B* dogodka **(** $P(B) \neq 0$ **)**
- **Pogojna verjetnost** dogodka *A* pri pogoju *B* je delež dogodka *A* med poskusi, pri katerih se zgodi dogodek *B*.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Neodvisna dogodka

- Če je P(A|B)=P(A) sta dogodka A in B neodvisna.
- P(AB)=P(A) P(B)



Slučajna spremenljivka

- Funkcija katere vrednost je odvisna od slučaja.
  - Zaloga vrednosti (vrednosti ki jih spremenljivka lahko zajame)
  - Porazdelitev (verjetnosti s katerimi zavzame posamezne vrednosti)
- Slučajne spremenljivke
  - Diskretne
  - Zvezne
- Funkcija pV(n) = P(V=n) je verjetnostna gostota slučajne spremenljivke V.

Diskretne slučajne spremenljivke

- Števno mnogo izidov (x_1, x_2, x_3,..., x_n)
- Porazdelitev je povsem določena z gostoto $p(x_i)=P(X=x_i)$.

$$0 \leq p(x_i) \leq 1 \qquad \sum_i p(x_i) = 1$$

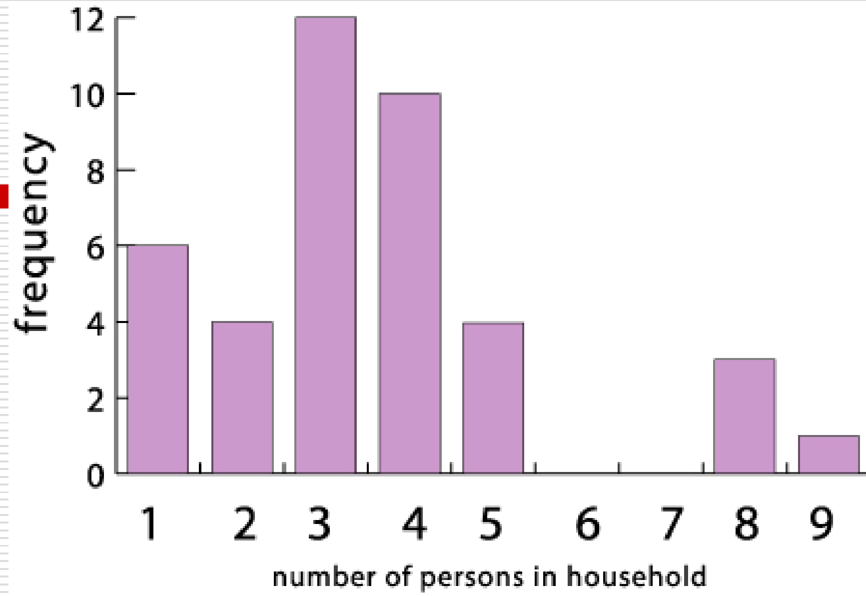
Zvezne slučajne spremenljivke

- Zaloga vrednosti slučajne spremenljivke je neštevna.
- Posamezni vrenosti zato ne moremo pripisati pozitivne verjetnosti.
- Verjetnostna gostota slučajne spremenljivke.

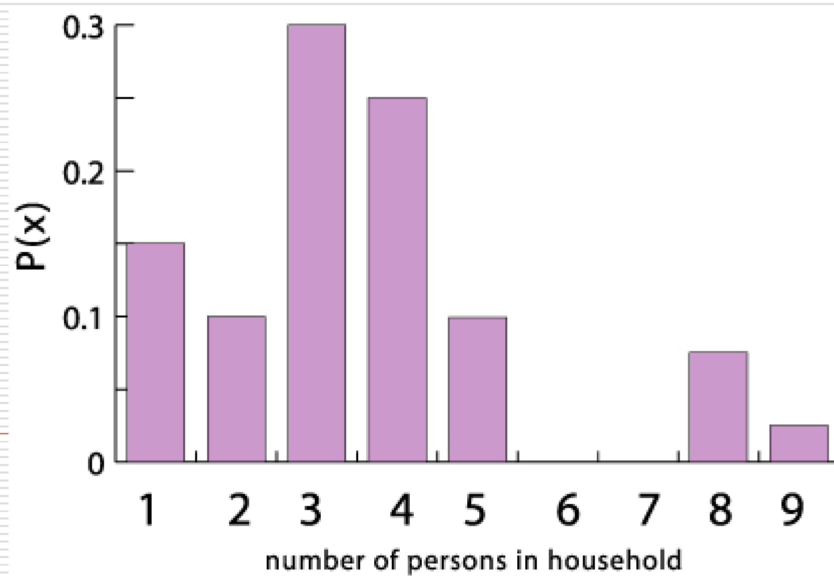
$$0 \leq p(x_i) \leq 1 \quad \text{in} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

- Obravnavamo podobno kot diskretne slučajne spremenljivke, le da vsoto nadomestimo z integralom.
- P(a≤x≤b) verjetnost, da x zavzame vrednost med a in b.

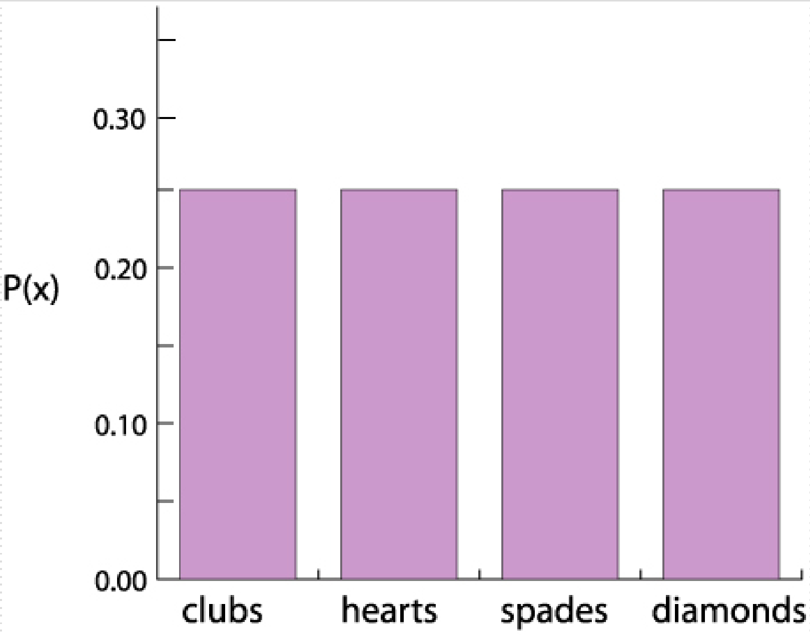
frekvenčni histogram



verjetnostna gostota



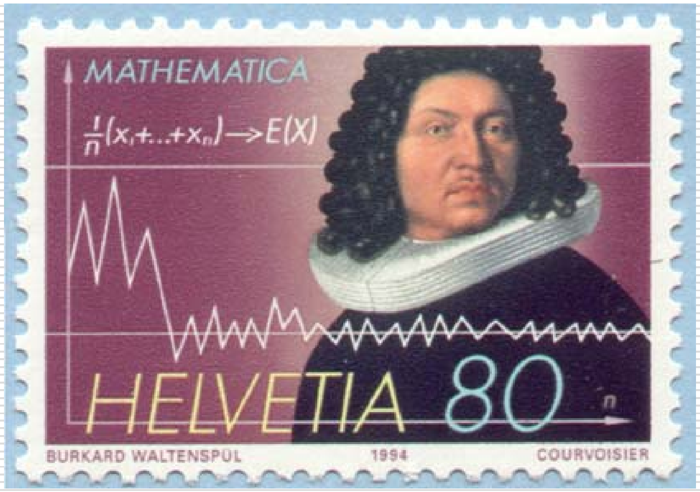
Enakomerna porazdelitev



Verjetnosti k možnih dogodkov so enake
$P(x) = 1/k$

Binomska porazdelitev
Bernoulli

- Enostaven naključni eksperiment z dvema mogočima izidoma
  - Uspeh (*U*)
  - Neuspeh (*N*)



Jacob Bernoulli (1654-1705)

- Primeri
  - Met kovanca
  - Spol novorojenčka
  - Izid zdravljenja

Binomska porazdelitev

- Če je verjetnost uspeha p
- Kakšna je verjetnost neuspeha (komplementarni dogodek)?
  - $q = 1 - p$
- Primeri
  - Met kovanca (U = cifra): $p = 0.5 \Rightarrow q = 0.5$
  - Met kocke (U = 1): $p = 0.1667 \Rightarrow q = 0.8333$
  - Verjetnost pozdravitve okužbe (U = pozdravitev): $p = 0.8 \Rightarrow q = 0.2$

Binomska porazdelitev

- n ponovitev poskusa

- Primeri
  - 5 metov kovanca
  - 25 metov igralne kocke
  - Zdravljenje okužbe pri 50 bolnikih

- Predpostavke: 1) *p* se od poskusa do poskusa ne spreminja in 2) poskusi so med seboj neodvisni

Binomska porazdelitev

- Kakšna je verjetnost X uspehov v seriji n poskusov?
- Primer
  - Kakšna je verjetnost, da pri 5 metih kovanca dvakrat vržemo cifro (C) in trikrat grb (G)?

$P(CCGGG) = (1/2)^5 = 1/32$

Binomska porazdelitev

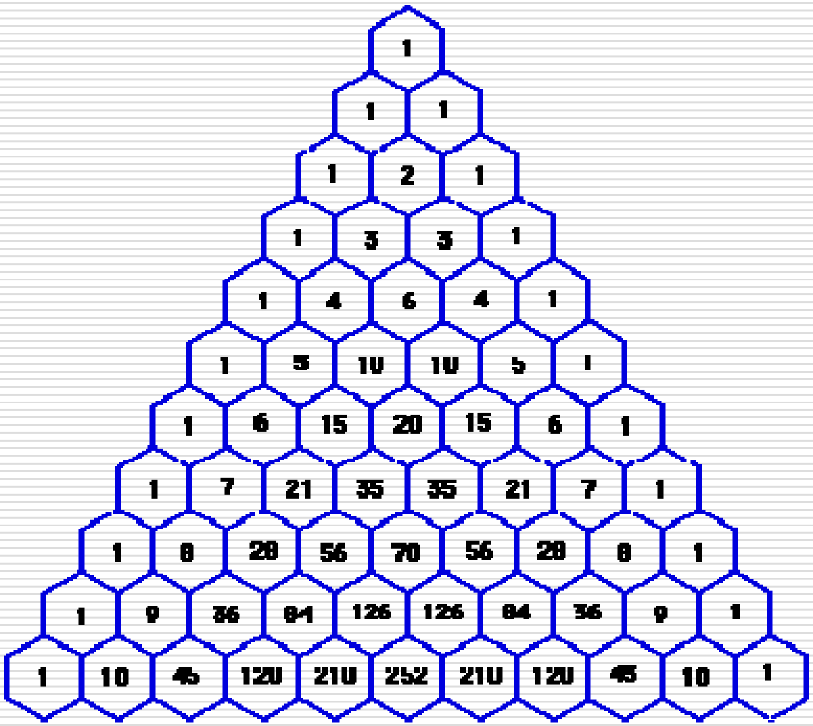
- Kombinacije dogodkov:

CCGGG CGCGG CGGCG CGGGC
GCCGG GCGCG GCGGC
GGCCG GGCGC
GGGCC

$P(2\ \mathrm{C}) = 10 \times 1/32 = 10/32$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1.3.2.1} = 10$$

Pascalov trikotnik



Binomska porazdelitev

- Uspeh / Neuspeh

NNUNNNNUNUNUUNNNNNUN...

Verjetnost, da bo X poskusov uspešnih *v tem vrstnem redu je*

$$P(X) = q \cdot q \cdot p \cdot q \cdot \ldots$$
$$= p^X \cdot q^{n-X}$$

Binomska porazdelitev

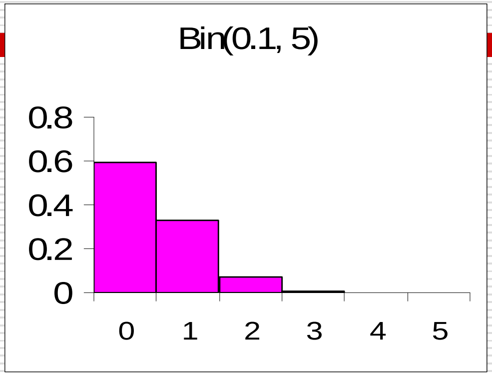
- Če zaporedje dogodkov ni pomembno

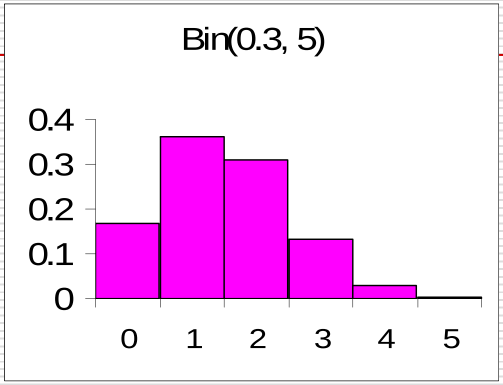
$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} \cdot p^X \cdot q^{n-X}$$

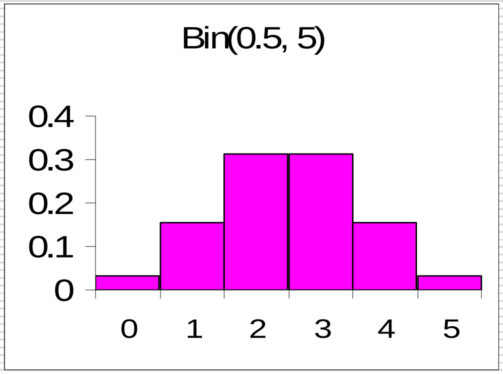
kjer $\frac{n!}{X!(n-X)!}$ število možnih kombinacij dogodkov, od katerih je X uspešnih

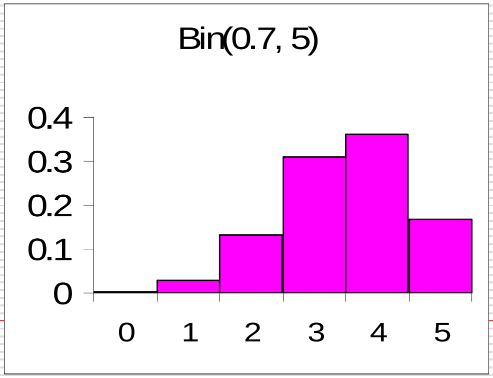
pri n poskusih, kjer je $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

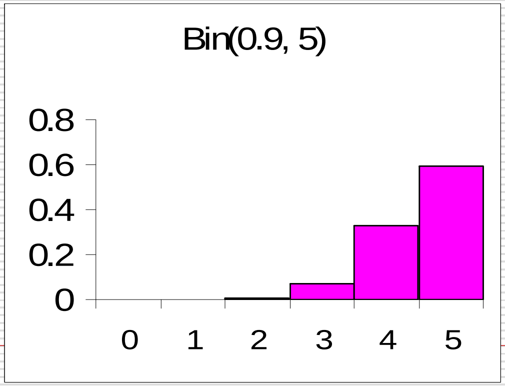
Binomska porazdelitev











Povprečna lega in razpršenost

- E(x)=*n p*
- D(x)=*n p (1-p)*

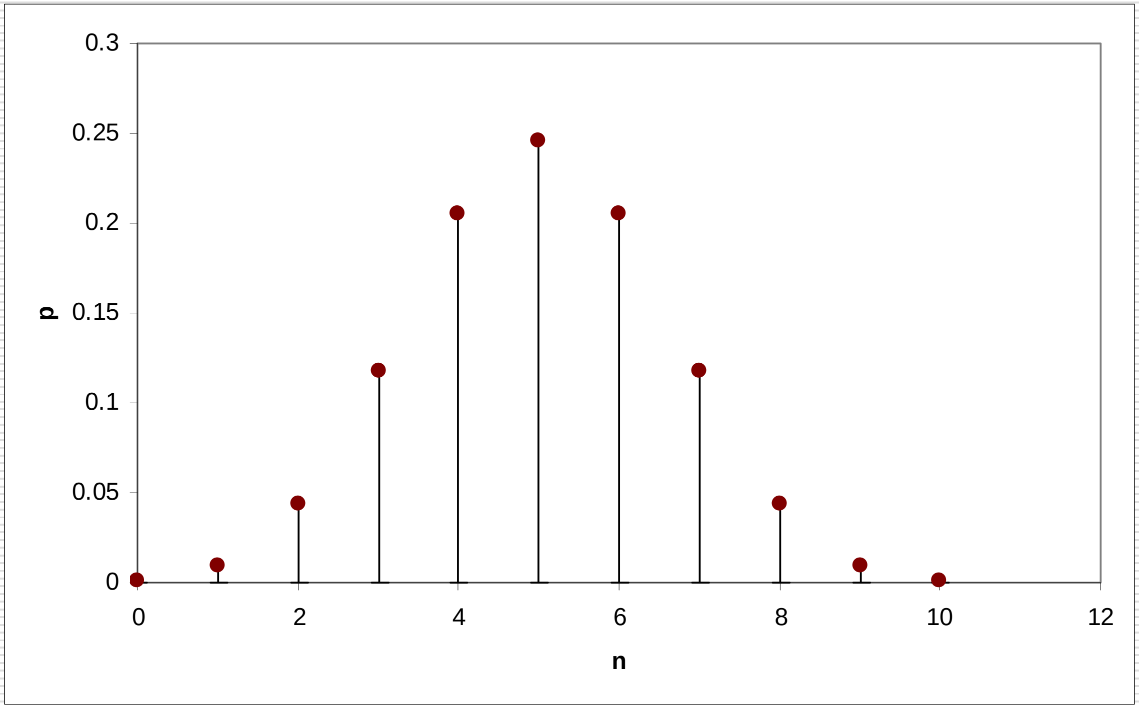
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

p	1-p	σ
0.5	0.5	0.500
0.4	0.6	0.490
0.3	0.7	0.458
0.2	0.8	0.400
0.1	0.9	0.300

- E(x)=*p*
- D(x)=*p (1-p)/n*

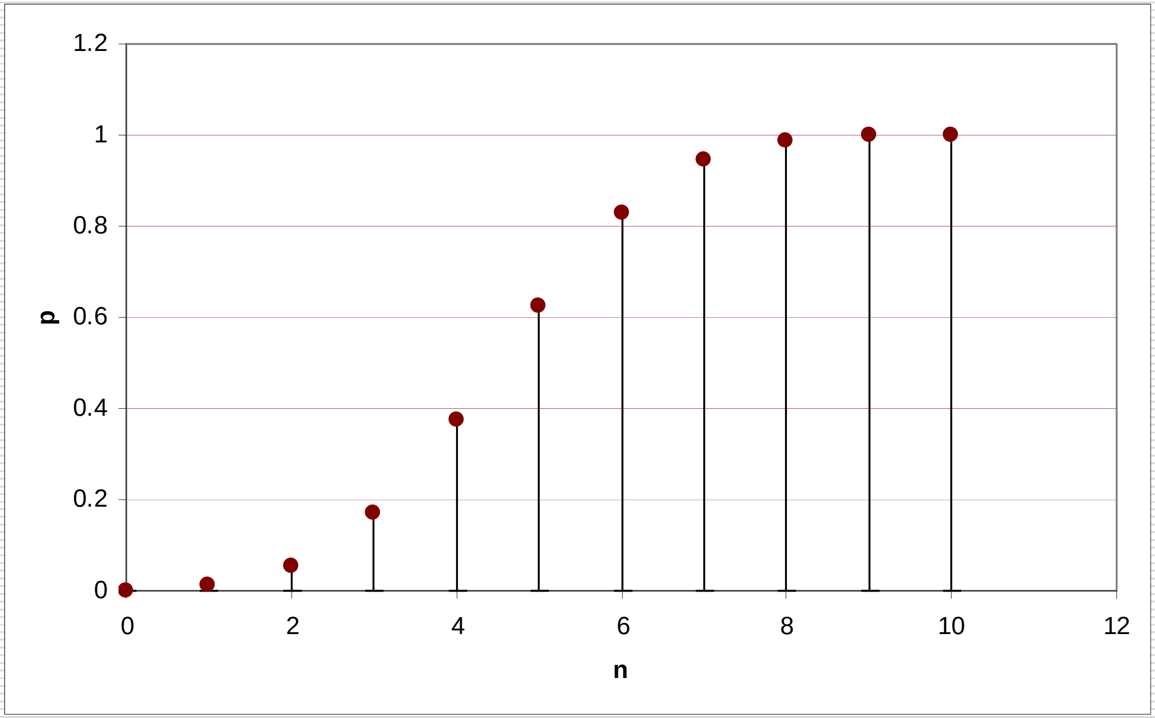
$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Velikost vzorca



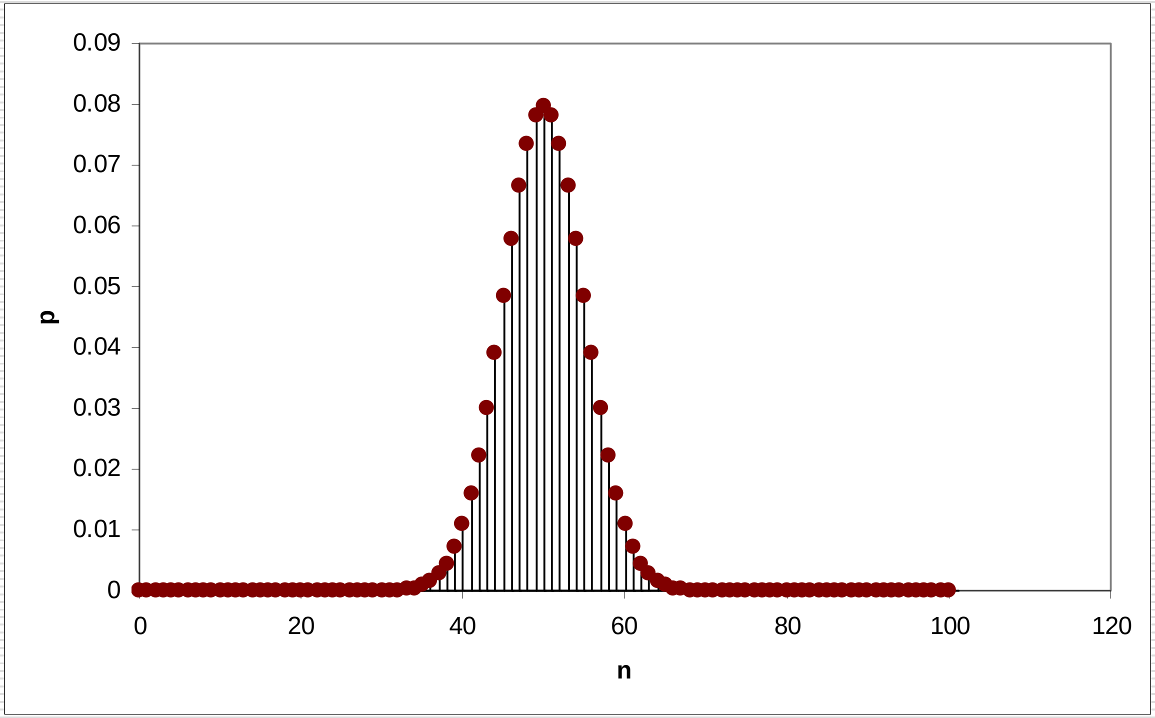
N=10
P=0.5

Kumulativna gostota verjetnosti

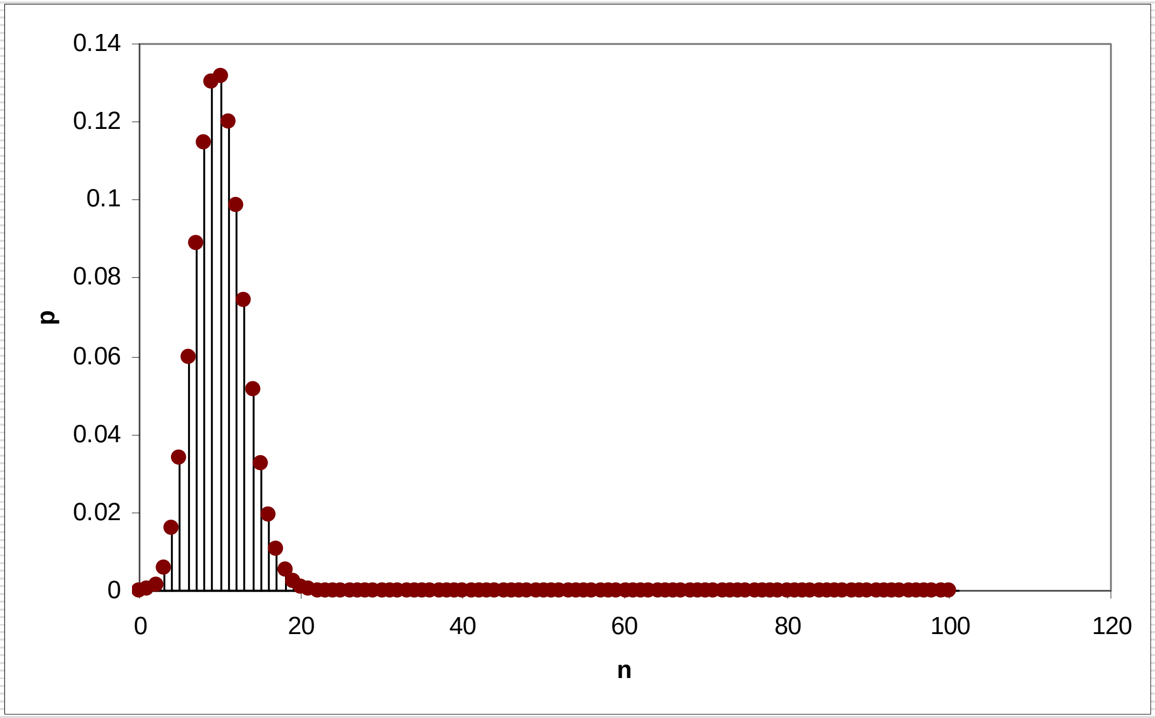


N=10
P=0.5

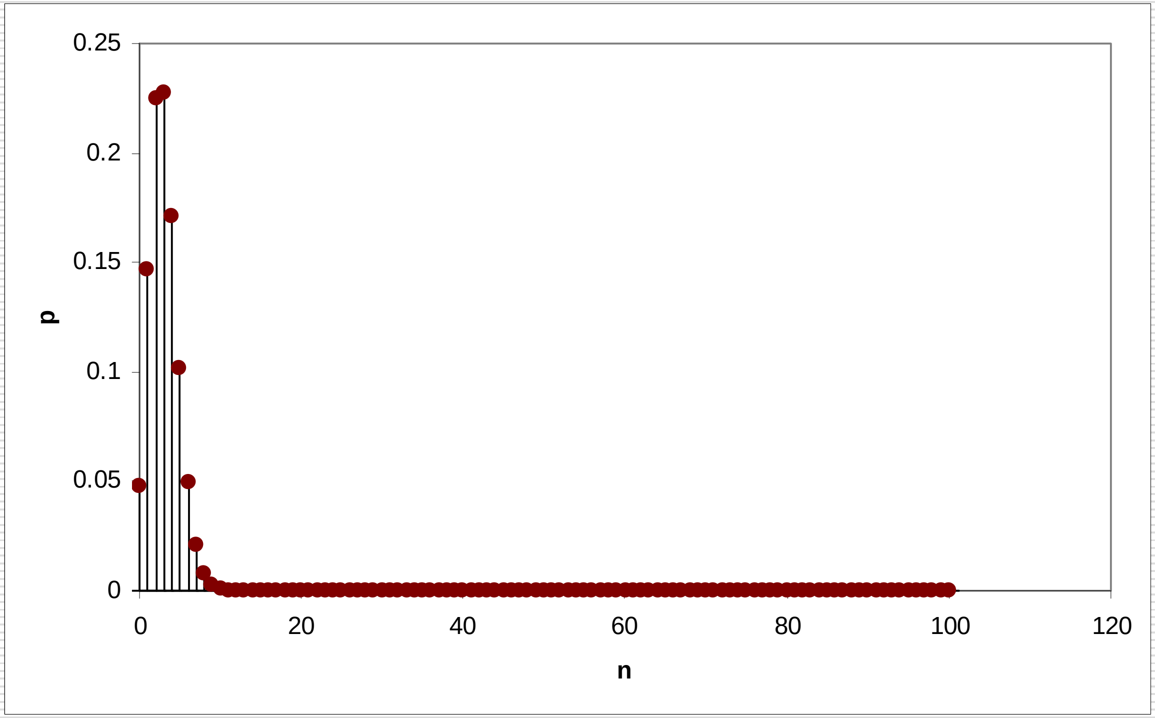
Veliki vzorci



N=100
P=0.5



N=100
P=0.1



N=100
P=0.03

Poissonova porazdelitev

- Ko je število poskusov veliko in je verjetnost dogodka majhna postane računanje binomskih verjetnosti zelo zahtevno

- Povprečno število uspehov v n poskusih je $\lambda = np$
  - Primer: 64 smrti v 20 letih na 1000 vojakov

Simeon D. Poisson (1781-1840)

Poissonova porazdelitev

- S substitucijo λ/n za p in pri velikem številu poskusov, postane Poissonova porazdelitev zelo dober približek za binomsko porazdelitev:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Poissonova porazdelitev
Emisija α-delcev

- Rutherford, Geiger, and Bateman (1910) so šteli α-delce, ki jih je emitiral film iz polonija v 2608 zaporednih intervalih po 1/8 minute
  - *n*?
  - *p*?

- Ali lahko rezultate poskusa opišemo s Poissonovo porazdelitvijo?

Poissonova porazdelitev

Emissija α-delcev

- Izračun λ:

  λ = Povprečno število delcev na interval

  = 10097/2608

  = 3.87

- Pričakovane vrednosti:

$$2608 \times P(x) = 2608 \times \frac{e^{-3.87}(3.87)^x}{x!}$$

No. α-particles	Observed
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273
7	139
8	45
9	27
10	10
11	4
12	0
13	1
14	1
Over 14	0
Total	2608

Poissonova porazdelitev

Emisija α-delcev

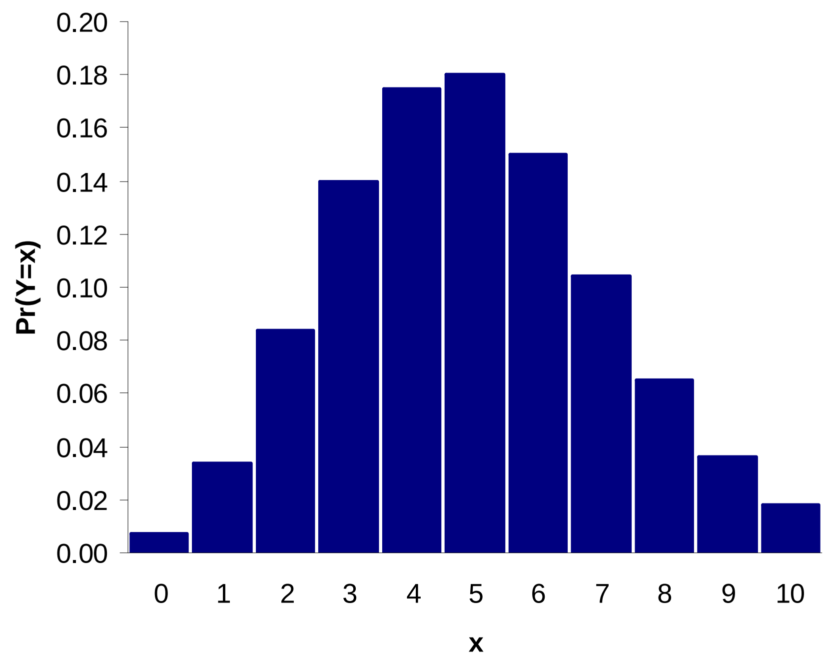
No. α-particles	Observed	Expected
0	57	54
1	203	210
2	383	407
3	525	525
4	532	508
5	408	394
6	273	255
7	139	140
8	45	68
9	27	29
10	10	11
11	4	4
12	0	1
13	1	1
14	1	1
Over 14	0	0
Total	2608	2608

Tipično število epileptičnih napadov

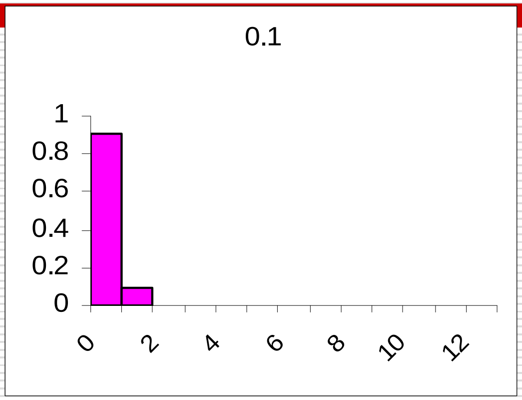
na mesec: λ=5

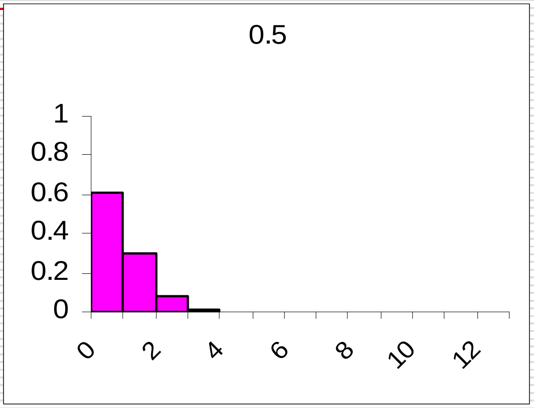
$$P(Y_i = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

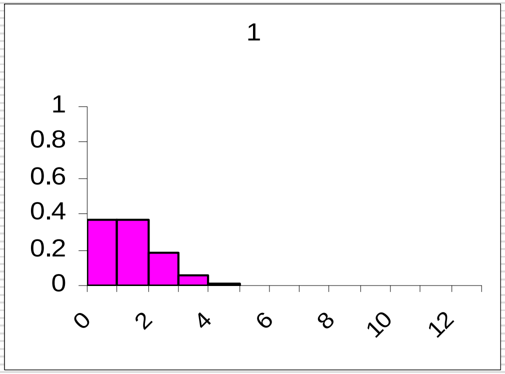
x=	Pr(Y=x)
0	0.007
1	0.034
2	0.084
3	0.140
4	0.175
5	0.180
6	0.150
7	0.104
8	0.065
9	0.036
10	0.018

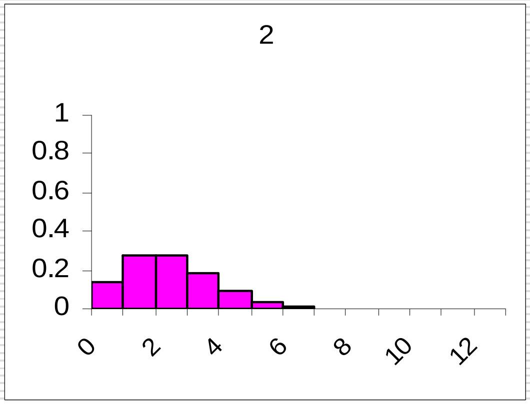


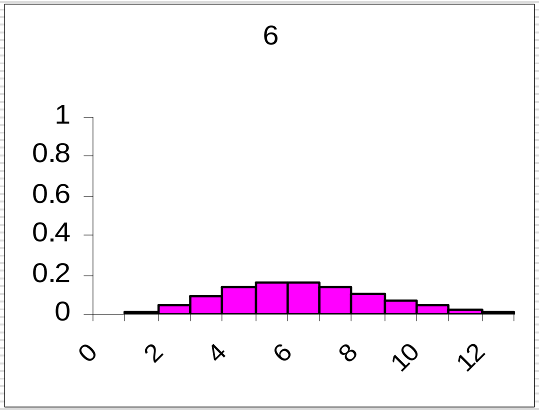
Poissonova porazdelitev











Pričakovana vrednost diskretne slučajne spremenljivke

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n$$

Varianca slučajne diskretne spremenljivke

$$\sigma^2(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \right)^2$$

Pričakovana vrednost zvezne slučajne spremenljivke

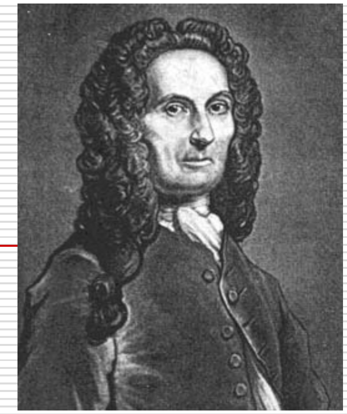
$$E(X) = \int xf(x)dx$$

Za enakomerno porazdelitev spremenljivke *x*, kjer je *f(x)* definiran na intervalu [a,b] in je a<b:

$$E(X) = (b+a)/2 \quad \text{in} \quad \sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normalna porazdelitev

- 1733 de Moivre (aproksimacija binomske porazdelitve za velike n)
- 1809 Gauss
- Pomembna zaradi ***centralnega limitnega izreka***, ki pravi, da je vsota velikega števila neodvisnih slučajnih spremenljivk (binomska porazdelitev, Poissonova porazdelitev, ...) porazdeljena normalno
  - Primer: Telesna teža človeka je odvisna od številnih dejavnikov (genetski in okoljski, njihovi vplivi so aditivni. Telesna teža je zato porazdeljena normalo.



Abraham de Moivre
(1667-1754)

Karl F. Gauss
(1777-1855)

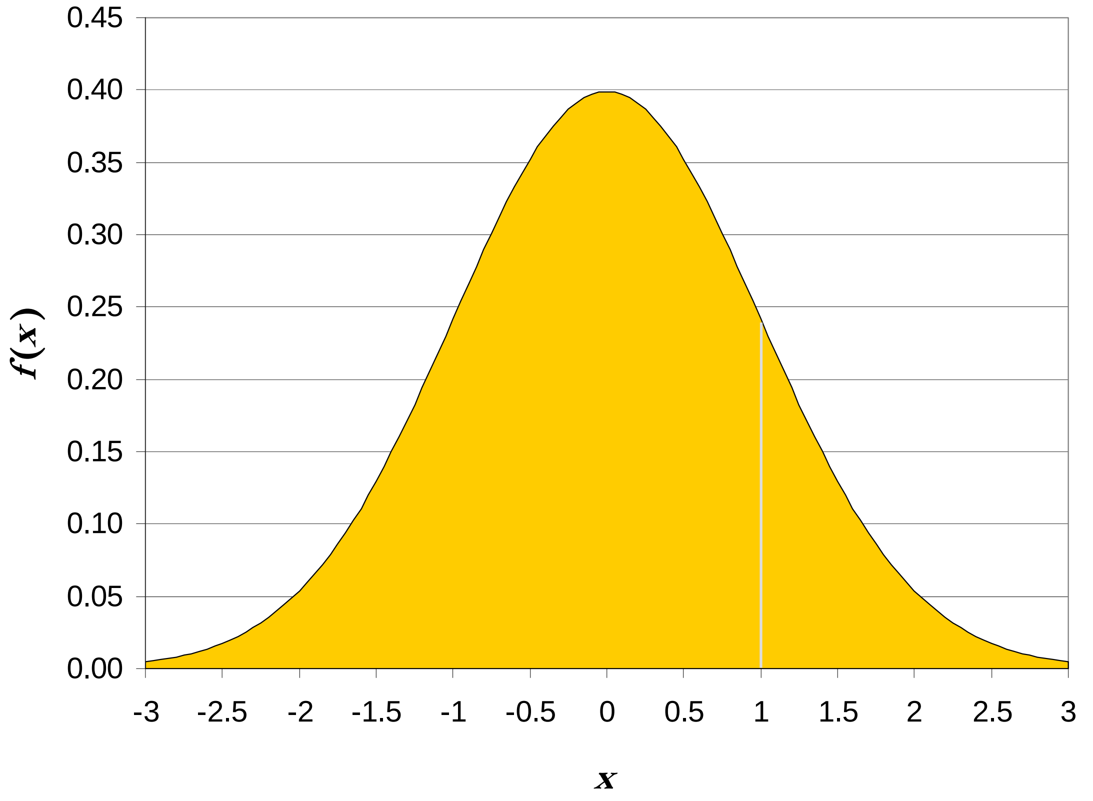
Normalna porazdelitev

- Zvezna slučajna spremenljivka je porazdeljena normalno z aritmetično sredino μ in varianco σ^2 če je njena gostota verjetnosti:

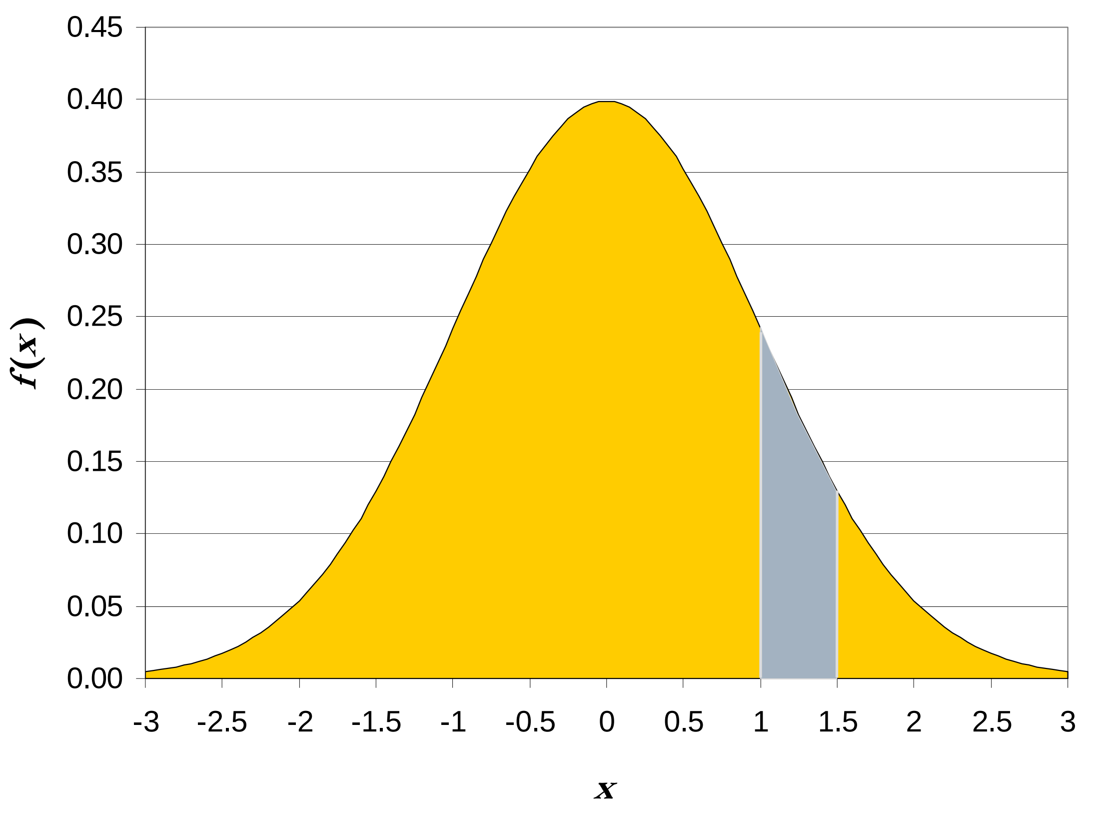
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

- *f*(*x*) ni isto kot *P*(*x*)
  - *P*(*x*) = 0 za vsak *x*, ker je normalna porazdelitev zvezna
  - Toda, $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

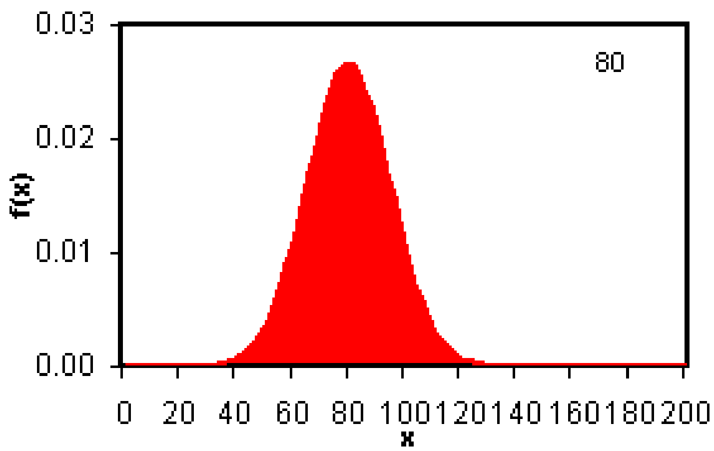
Normalna porazdelitev

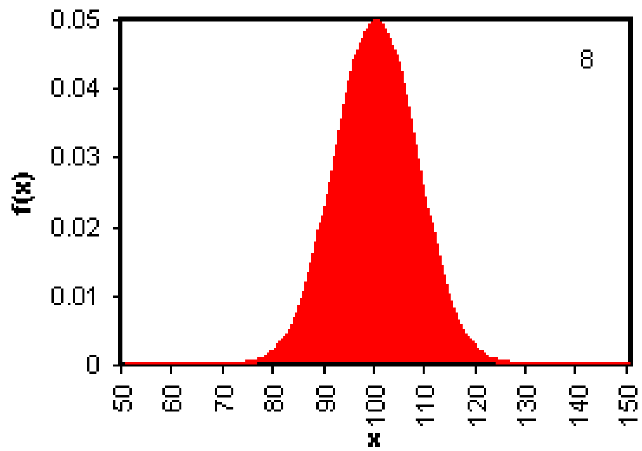


Normalna porazdelitev



Normalna porazdelitev



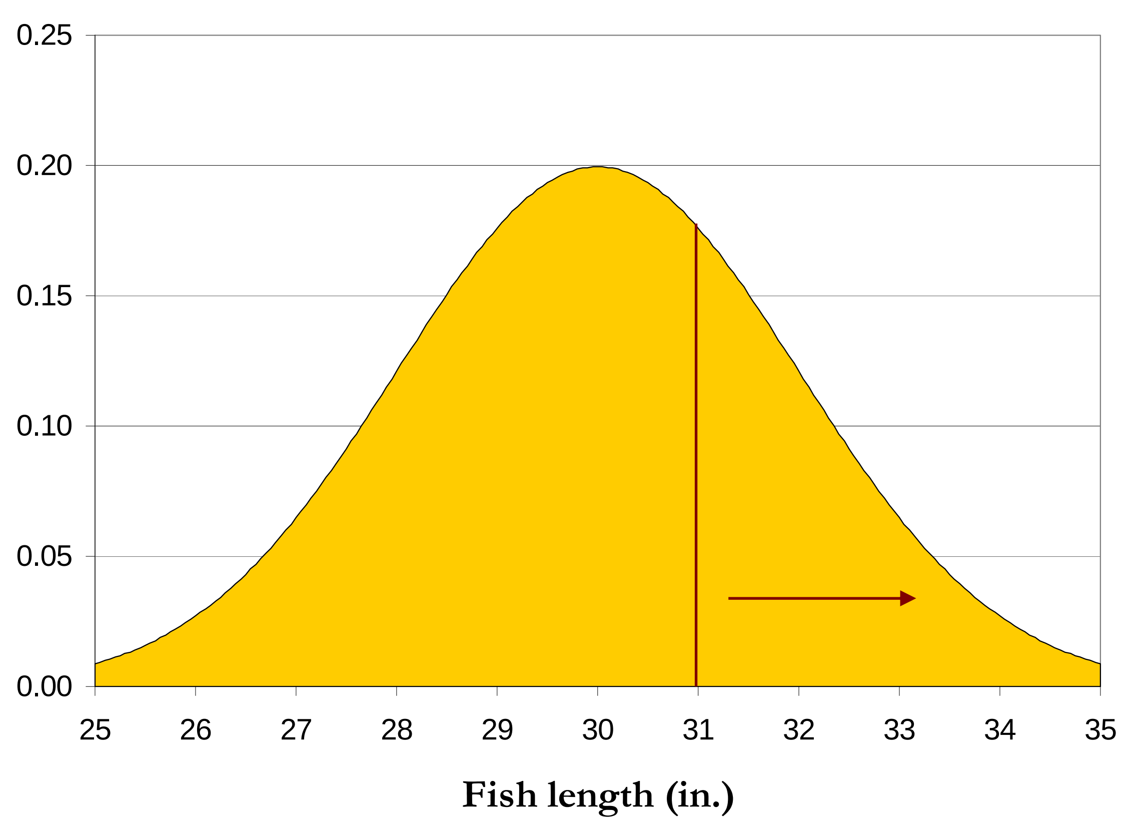


Aritmetična sredina

Varianca

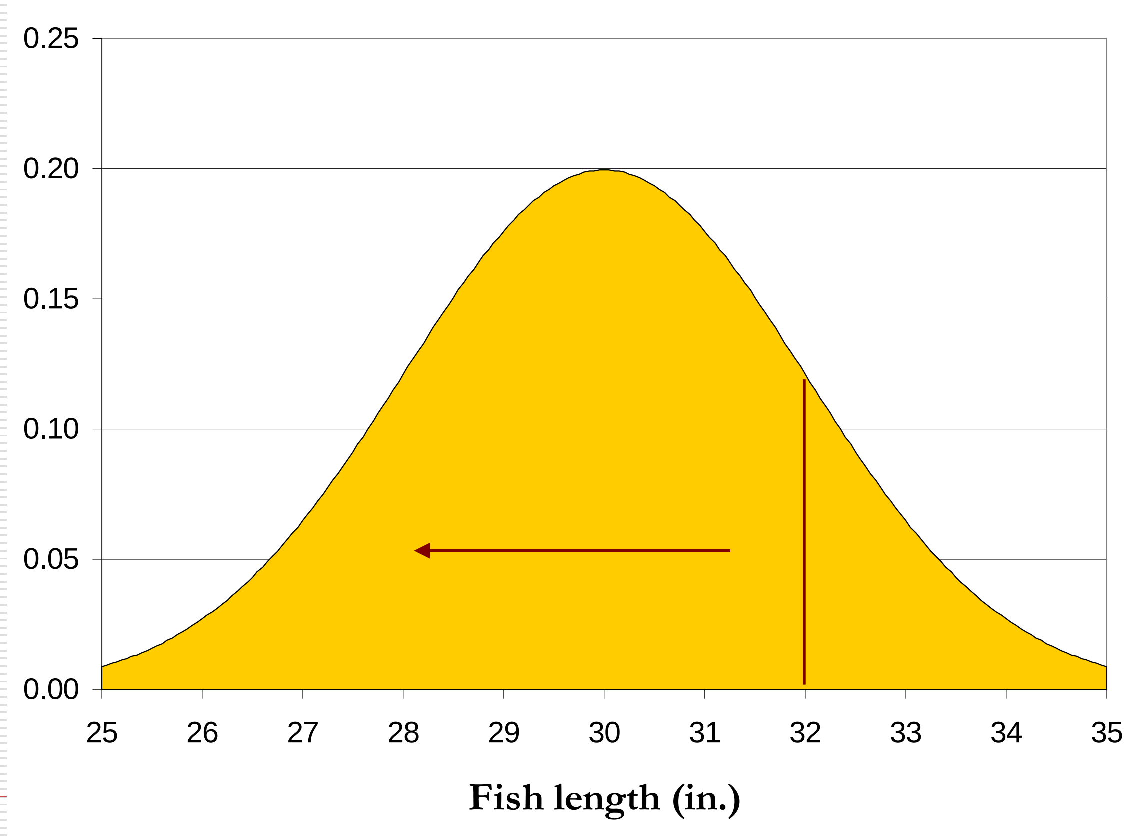
Normalna porazdelitev

- Kakšna je verjetnost, da bo ujeta postrv dolga vsaj 31 cm?



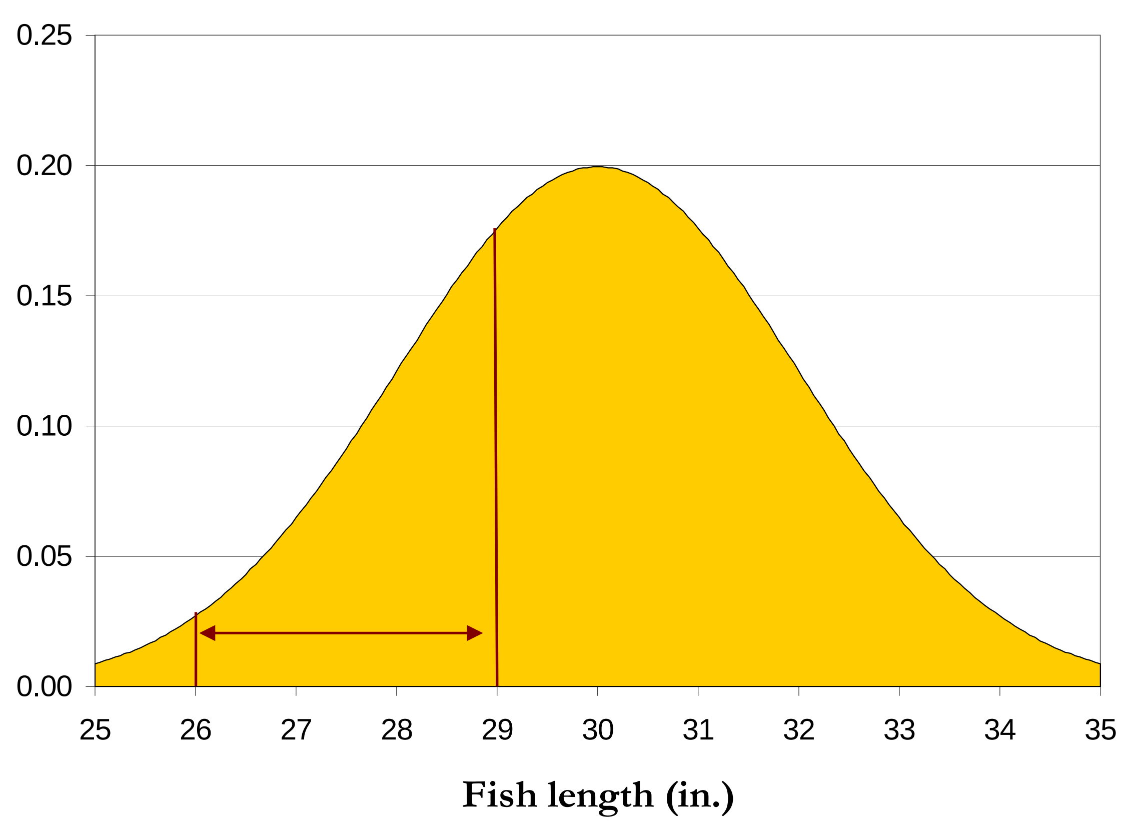
Normalna porazdelitev

- Kakšna je verjetnost, da bo ujeta postrv krajša od 32 cm?



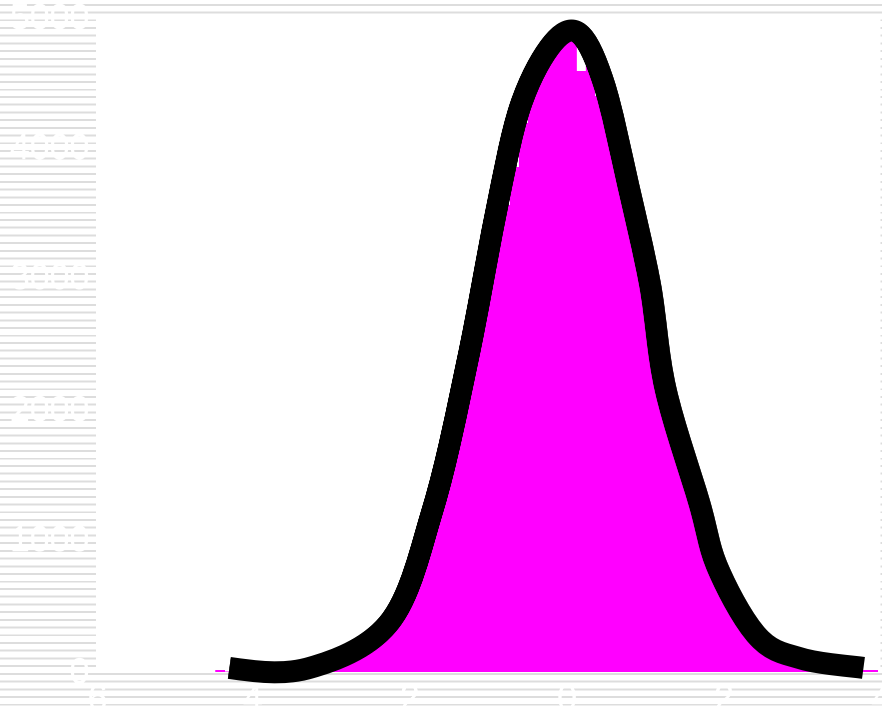
Normalna porazdelitev

- Kakšna je verjetnost, da bo ujeta postrv dolga med 26 in 29 cm?



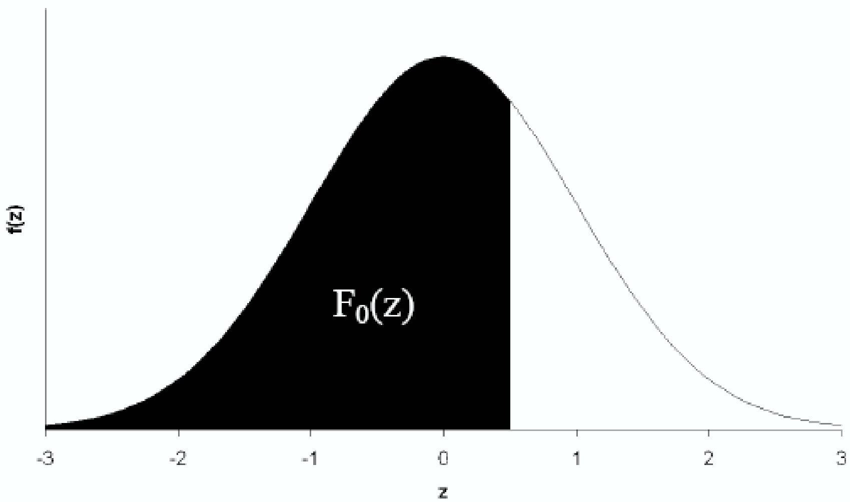
Standardizirana normalna porazdelitev

- $\mu=0$ and $\sigma^2=1$



Tasks

Tabela standardizirane normalne distribucije.



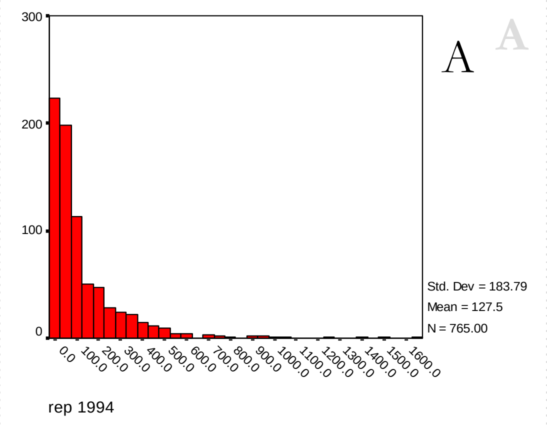
Stopnja tveganja (α)	Enostransko tveganje	Dvostransko tveganje
0.1	1.282	1.645
0.05	1.645	1.960
0.025	1.960	2.241
0.01	2.326	2.576
0.005	2.576	2.807

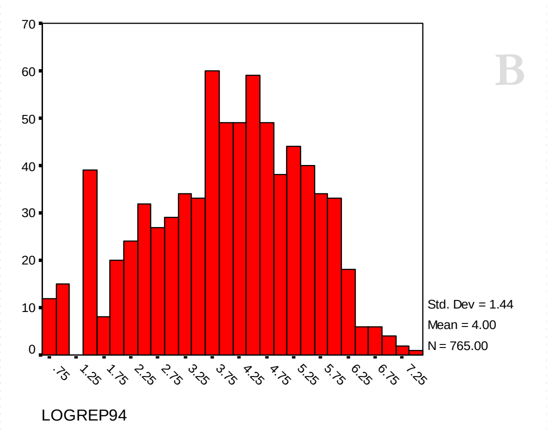
$F_0(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

Log-normalna porazdelitev

- X je ***log-normalno porazdeljena slučajna spremenljivka*** , če so njene logaritemske vrednosti ln(X), porazdeljene normalno.
- Učinki posameznih dejavnikov se množijo (multiplikativni model)
- Porazdelitev spremenljivke je asimetrična v desno (A), njene logaritemske vrednosti pa se porazdeljujejo normalno (B).

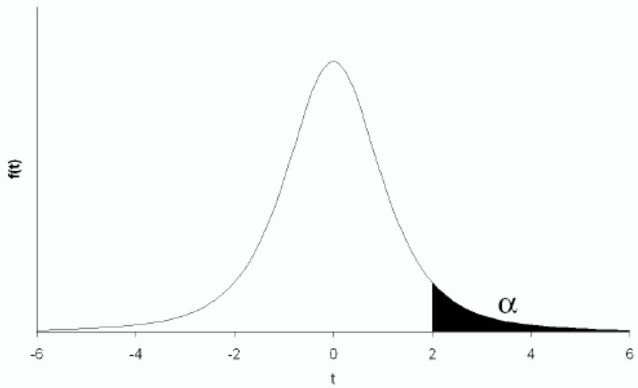




Porazdelitev

- Binomska
- Poissonova
- Normalna
  - Standardizirana normalna
- Studentova porazdelitev (t porazdelitev)
- χ^2 porazdelitev
- F porazdelitev

Studentova porazdelitev

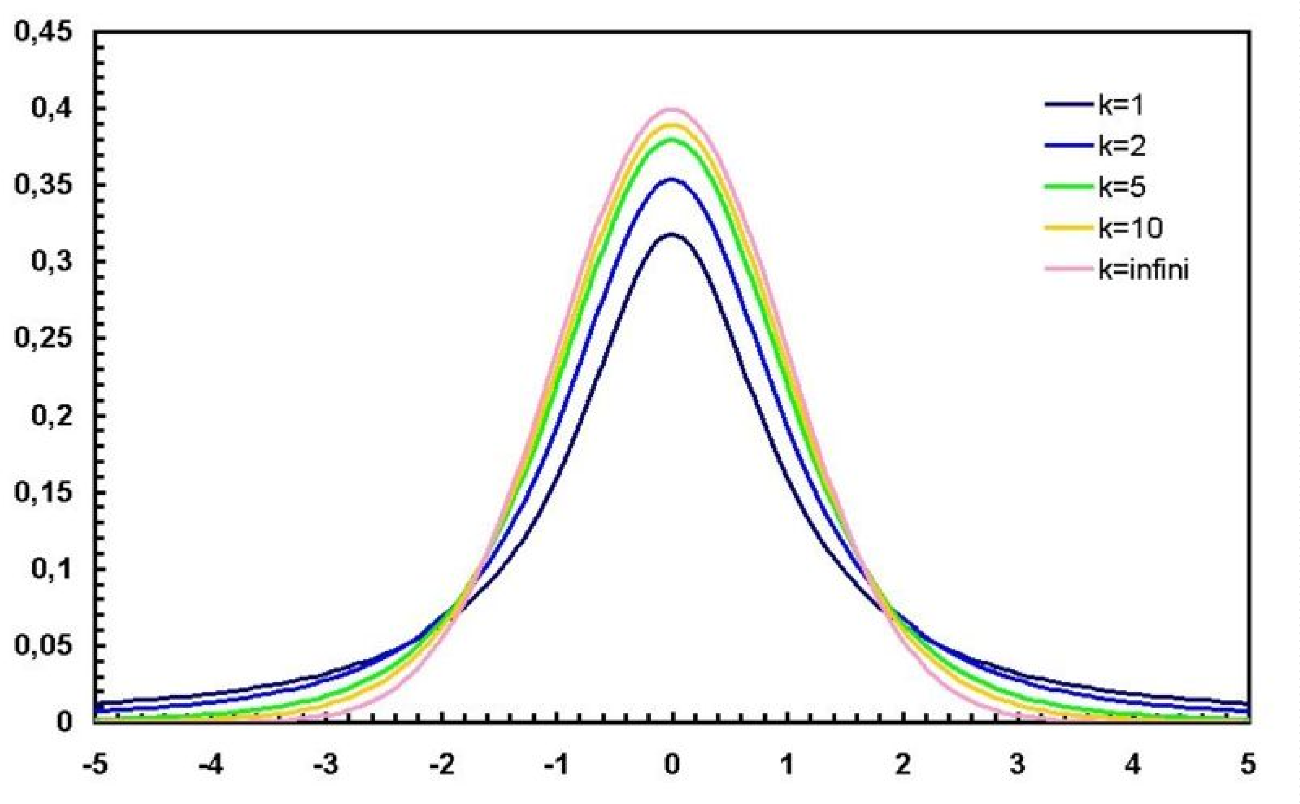


$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{N}}$$

t

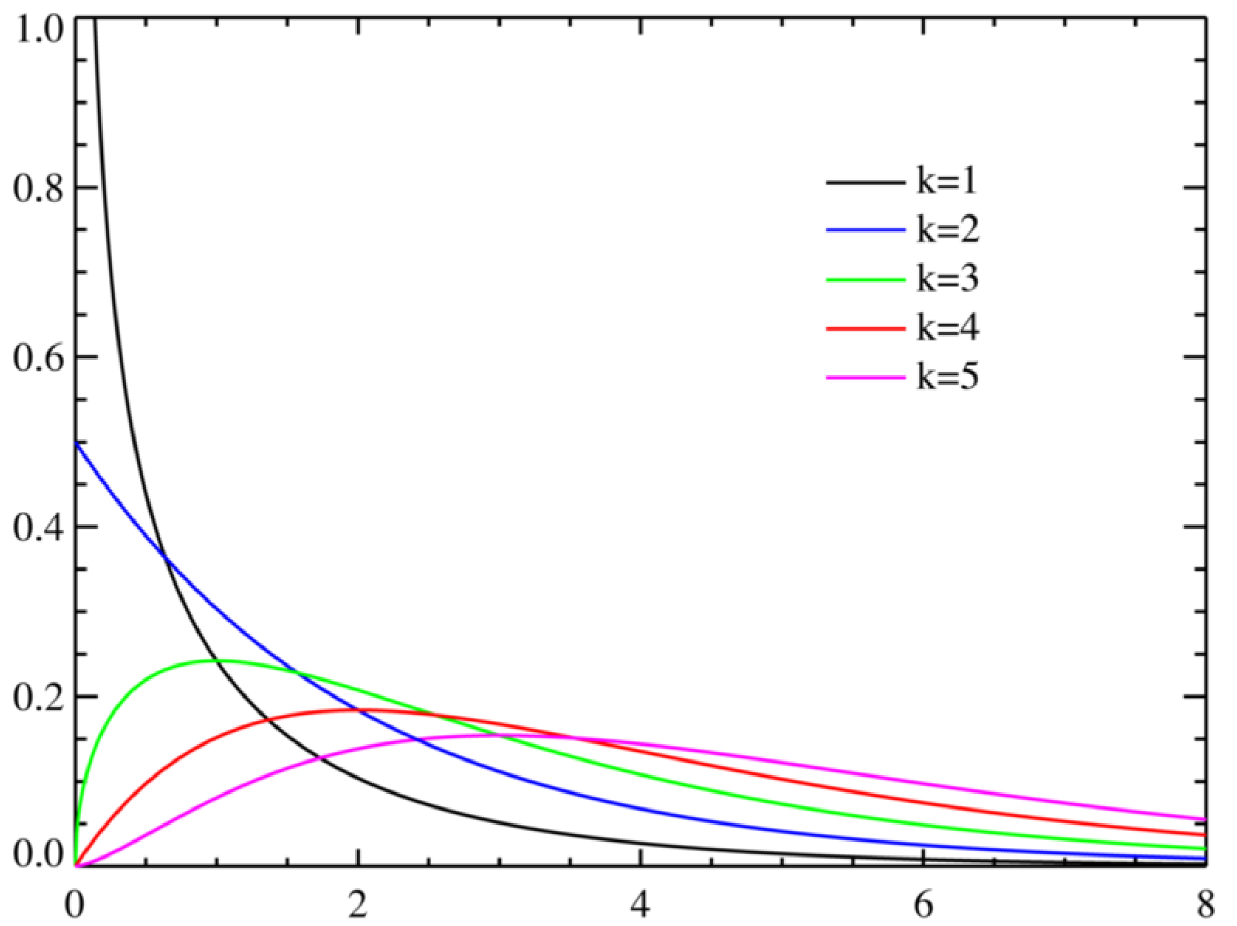
Število prostostnih stopenj	Stopnja tveganja (α)				
Dvostransko tveganje	**0.4**	**0.2**	**0.1**	**0.05**	**0.01**
Enostransko tveganje	**0.2**	**0. 1**	**0.05**	**0.025**	**0.005**
1	1.376	3.078	6.314	12.706	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	9.925
3	0.978	1.638	2.353	3.182	5.841
4	0.941	1.533	2.132	2.776	4.604
5	0.920	1.476	2.015	2.571	4.032
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.707
7	0.896	1.415	1.895	2.365	3.499
8	0.889	1.397	1.860	2.306	3.355
9	0.883	1.383	1.833	2.262	3.250

Studentova porazdelitev



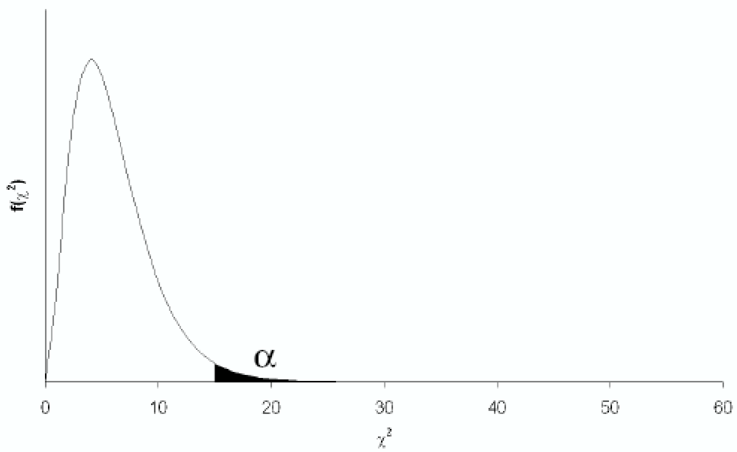
William Seally Gosset, Guiness Brew., Dublin

χ^2 porazdelitev



$$\chi^2 = \sum Z_i^2$$

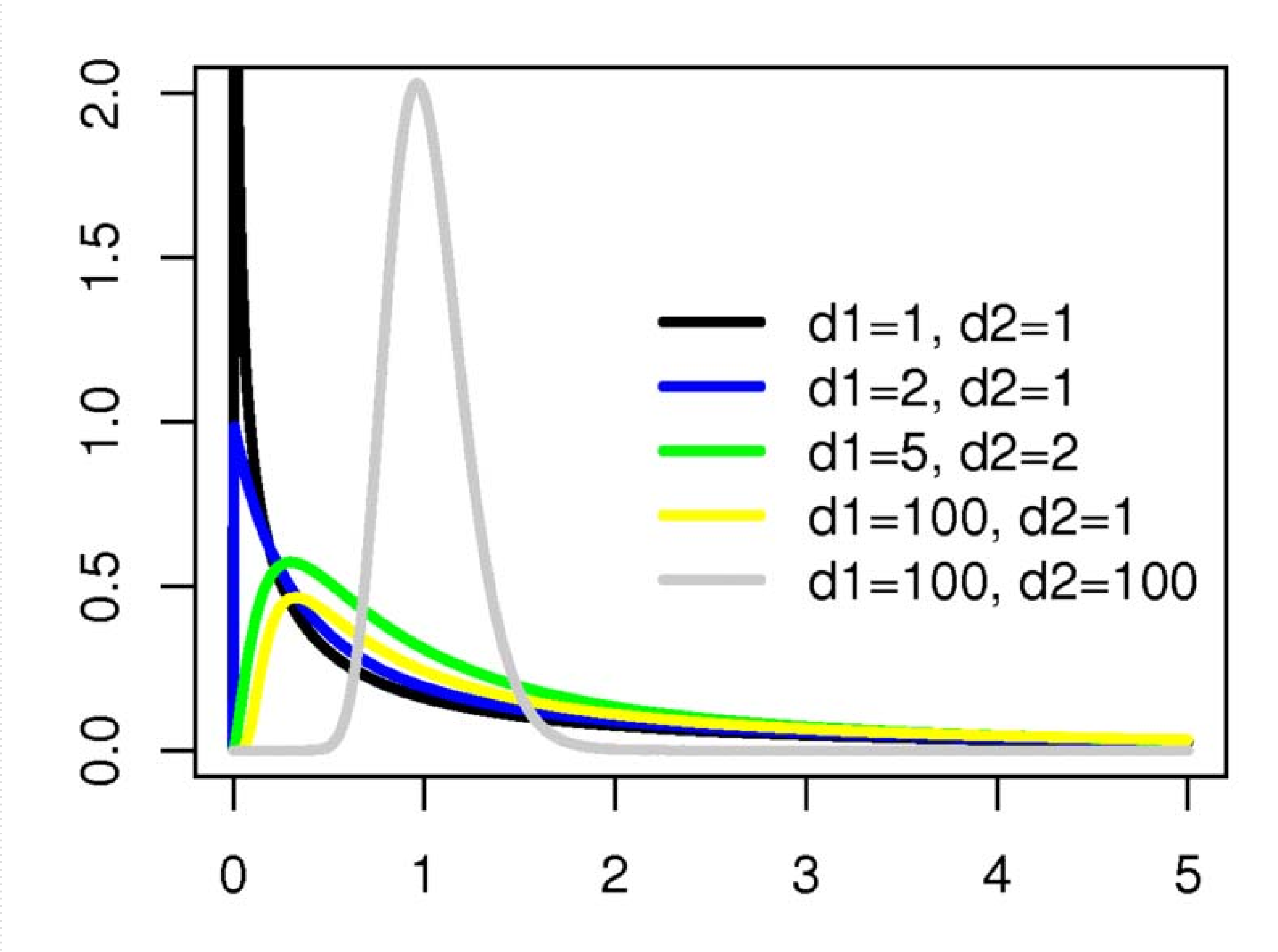
χ^2 porazdelitev



χ^2

Število prostostnih stopenj	Stopnja tveganja (α)				
	0.001	**0.01**	**0.025**	**0.05**	**0.1**
1	10.8274	6.6349	5.0239	3.8415	2.7055
2	13.8150	9.2104	7.3778	5.9915	4.6052
3	16.2660	11.3449	9.3484	7.8147	6.2514
4	18.4662	13.2767	11.1433	9.4877	7.7794
5	20.5147	15.0863	12.8325	11.0705	9.2363
6	22.4575	16.8119	14.4494	12.5916	10.6446

F porazdelitev
Fisher-Snedecor



$$F = \frac{s_1^2}{s_1^2}$$

Primer

USP – test mase tablet

V naključnem vzorcu 20 tablet lahko od aritmetične sredine odstopata za več kot 10% največ 2 tableti, nobena pa ne za več kot 20%.

Priporočilo statistika je da mora v seriji tablet imeti 98% tablet maso znotraj intervala +/- 10%.

Izdelali smo serijo 3.000.000 tablet in izbrali naključen vzorec 1000 tablet (aritmetična sredina 101.2 mg in s 3.92 mg).

Ali izdelana serija ustreza priporočilu statistika?

Kakšna je verjetnost, da bomo izdelano serijo z USP testom spoznali kot neustrezno?